Problemas de Aritmética II

I Verão Matemático na UESC

01 de Fevereiro de 2011

Problema 1 Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

Problema 2 (20ª OBM 1998 - Segunda Fase - Nível 1) João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas. Explique porque o resultado desta soma não pode ser igual a 1998. *Obs: Cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.*

Problema 3 Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 10.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10\,.$$

Antes de cada um deles coloque, se possível, sinais $(+)$ ou $(-)$ de forma que a soma de todos seja zero.

Problema 4 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 1) A soma de todos os números ímpares de dois algarismos menos a soma de todos os números pares de dois algarismos é:

$a)$ 50 $\quad b)$ 46 $\quad c)$ 45 $\quad d)$ 49 $\quad e)$ 48

Problema 5 Mostre que o produto de todos os números da forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 100$ é o quadrado de um número inteiro.

Problema 6 Determine com quantos zeros consecutivos termina a representação decimal do número $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 2011$.

Problema 7 (21ª OBM 1999 - Segunda Fase - Nível 1) Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345, para que o número restante seja o maior possível.

Problema 8 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 2) Qual é o dígito das unidades do número 3^{1998}?

$a)$ 1 $\quad b)$ 3 $\quad c)$ 5 $\quad d)$ 7 $\quad e)$ 9

Problema 9 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 2) O número $1234a6$ é divisível por 7. O algarismo a vale:

$a)$ 0 $\quad b)$ 2 $\quad c)$ 5 $\quad d)$ 6 $\quad e)$ 8

Problema 10 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 3) Um número inteiro n é bom quando $4n + 1$ é um múltiplo de 5. Quantos números bons há entre 500 e 1.000?

a) 50 *b*) 51 *c*) 100 *d*) 101 *e*) 102

Problema 11 Um número de dois algarismos não nulos é igual ao dobro do produto desses algarismos. Esse número pertence ao conjunto:

a) $\{11, 12, ..., 30\}$ *b*) $\{31, 32, ..., 50\}$ *c*) $\{51, 52, ..., 70\}$ *d*) $\{71, 72, ..., 90\}$
e) $\{91, 92, ..., 99\}$

Problema 12 (20ª OBM 1998 - Segunda Fase - Nível 1) Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

Problema 13 (21ª OBM 1999 - Primeira Fase - Nível 1) Quantos números de dois algarismos são primos e têm como antecessor um quadrado perfeito?

a) 2 *b*) nenhum *c*) 1 *d*) 3 *e*) 6

Problema 14 Os números naturais de 1 até 2011 são escritos em um imenso quadro negro. Em seguida, um aluno apaga dois quaisquer colocando no lugar sua diferença (não negativa). Depois de muitas operações, um único número ficará escrito no quadro. É possível que esse número seja zero?

Problema 15 (19ª OBM 1997 - Primeira Fase Júnior) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:

a) 2 *b*) 3 *c*) 6 *d*) 7 *e*) 9

Problema 16 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 1) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

a) 2 *b*) 4 *c*) 6 *d*) 8 *e*) 10

Problema 17 (21ª OBM 1999 - Segunda Fase - Nível 1) Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$127,00 pudesse ser paga entregando–se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

Problema 18 Responda rápido a estas perguntas:

1. Se uma coisa começa em uma segunda–feira e dura 7 dias, em que dia ela termina? E se durar 14 dias? E se durar 701 dias?

2. Se uma coisa começa às 8 horas da manhã e dura 24 horas, a que horas ela acaba? E se durar 48 horas? E se durar 4804 horas?

3. Se o ponteiro dos minutos de um relógio está apontando 23 minutos, para onde ele estará apontando daqui a 60 minutos? e daqui a 120 minutos? e daqui a 66681 minutos?

Problema 19 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 2) Hoje é sábado. Que dia da semana será daqui a 99 dias?

a) segunda–feira b) sábado c) domingo d) sexta–feira e) quinta–feira

Problema 20 (21ª OBM 1999 - Primeira Fase - Nível 1) A calculadora de Juliana é bem diferente. Ela tem uma tecla **D**, que duplica o número escrito no visor e a tecla **T**, que apaga o algarismo das unidades do número escrito no visor. Assim, por exemplo, se estiver escrito 123 no visor e apertarmos **D**, teremos 246; depois, apertando **T**, teremos 24. Suponha que esteja escrito 1999. Se apertamos **D** depois **T**, em seguida **D**, depois **T**, teremos o número:

a) 96 b) 98 c) 123 d) 79 e) 99

Problema 21 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 2) Num código secreto, as 10 primeiras letras do nosso alfabeto representam os algarismos de 0 a 9, sendo que a cada letra corresponde um único algarismo e vice–versa. Sabe-se que $d + d = f$, $d^2 = f$, $c + c = d$, $c + d = a$ e $a - a = b$. Podemos concluir que $a + b + c + d$ é igual a:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Problema 22 (20ª OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 3) A média aritmética de seis números é 4. Quando acrescentamos um sétimo número, a nova média é 5. O número que foi acrescentado é:

a) 5 b) 6 c) 8 d) 10 e) 11

Problema 23 (21ª OBM 1999 - Segunda Fase - Nível 2) Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de $(3, 6, 9, 12)$ (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

Problema 24 (21ª OBM 1999 - Primeira Fase - Nível 3) As representações decimais dos números 2^{1999} e 5^{1999} são escritas lado a lado. O número de algarismos escritos é igual a:

a) 1999 b) 2000 c) 2001 d) 3998 e) 3999

Problema 25 (4ª OdeM 1998 - Primeiro Nível) Escolha um número de quatro dígitos (nenhum deles zero) e começando com ele construa uma lista de 21 números distintos, de quatro dígitos cada um, que satisfaça a seguinte regra: depois de escrever cada novo número da lista devem–se calcular todas as médias entre dois dígitos desse número, descartando–se as médias que não dão um número inteiro, e com os que restam se forma um número de quatro dígitos que ocupará o lugar seguinte na lista. Por exemplo, se na lista se escreveu o número 2946, o seguinte pode ser 3333 ou 3434 ou 5345 ou qualquer outro número armado com os dígitos 3, 4 ou 5.

Problema 26 (Olimpíada de 1898) Determine todos os valores do natural n, para os quais $2^n + 1$ é múltiplo de 3.

Problema 27 (Olimpíada Russa de 1998) Existem números de 5 algarismos M e N onde todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que M divide N?

Problema 28 Ache três números inteiros cuja soma é um cubo e a soma de dois quaisquer deles também é um cubo.

Problema 29 Ache quatro inteiros que são quadrados e a soma de dois quaisquer deles ainda é um quadrado.

Problema 30 Maria convidou 9 garotos e 8 garotas para sua festa de aniversário. Ela preparou camisetas com os números de 1 a 18 e ficou com a de número 1 e distribuiu as demais para seus convidados. Em determinado momento, em que todos estavam dançando, a soma dos números de cada casal era um quadrado perfeito. Quais pares estavam dançando?

Problema 31 O produto de dois inteiros positivos consecutivos pode ser igual ao produto de dois inteiros positivos consecutivos pares?