

Problemas de Álgebra II

I Verão Matemático na UESC

08 de Fevereiro de 2011

Problema 1 (20^a OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 1) Qual dos números a seguir é o maior?

- a) 3^{45} b) 9^{20} c) 27^{14} d) 243^9 e) 81^{12}

Problema 2 (21^a OBM 1999 - Primeira Fase - Nível 2) O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a:

- a) 25^{25} b) 10^{25} c) 100^{25} d) 2^{25} e) 2×25^{25}

Problema 3 (21^a OBM 1999 - Primeira Fase - Nível 1) A metade do número $2^{11} + 4^8$ é igual a:

- a) $2^5 + 4^4$ b) $2^5 + 2^8$ c) $1^{10} + 2^8$ d) $2^{15} + 4^5$ e) $2^9 + 4^7$

Problema 4 (20^a OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 1) Elevei um número positivo ao quadrado, subtrai do resultado o mesmo número e o que restou dividi ainda pelo mesmo número. O resultado que achei foi igual:

- a) Ao próprio número.
b) Ao dobro do número.
c) Ao número mais 1.
d) À raiz quadrada do número.
e) Ao número menos 1.

Problema 5 (20^a OBM 1998 - Primeira Fase - Nível 1) O número que devemos somar ao numerador e subtrair do denominador da fração $\frac{1478}{5394}$ para transformá-la na sua inversa é:

- a) 3.916 b) 3.913 c) 3.915 d) 3.912 e) 3.917

Problema 6 Para quantos valores reais de p a equação $x^3 - px^2 + px - 1 = 0$ tem todas as raízes reais e inteiras?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 ou mais

Problema 7 Considere a equação

$$(2x - 5y + 10)(3y - x + 9) = xy .$$

Se $y = 0$, quanto vale x ?

Problema 8 Encontre as soluções inteiras positivas da equação $17^2 + x^2 = y^2$.

Problema 9 (21ª OBM 1999 - Primeira Fase - Nível 2) A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x - 45)^2 - (x - 21)^2 = 0$ é:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Problema 10 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Suponha que $a = b$, então

$$\begin{aligned} ab &= a^2 \\ ab - b^2 &= a^2 - b^2 \\ b(a - b) &= (a + b)(a - b) \\ b &= a + b \\ b &= 2b \\ 1 &= 2. \end{aligned}$$

Problema 11 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Sejam a e b dois números diferentes e c sua média aritmética, então

$$\begin{aligned} a + b &= 2c \\ (a + b)(a - b) &= 2c(a - b) \\ a^2 - 2ac &= b^2 - 2bc \\ a^2 - 2ac + c^2 &= b^2 - 2bc + c^2 \\ (a - c)^2 &= (b - c)^2 \\ a &= b. \end{aligned}$$

Problema 12 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Sabemos que se $ad = bc$ então vale

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

e portanto, se $a > b$ então $c > d$. Tomando $a = d = 1$ e $b = c = -1$, estes números satisfazem $ad = bc$, e além disso $a > b$. Segue-se que $c > d$, e portanto $-1 > 1$.

Problema 13 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Podemos escrever a identidade $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ na forma

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}},$$

ou equivalentemente, na forma

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}.$$

Segue-se que $(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{1})^2$, e portanto $-1 = 1$.

Problema 14 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

$$\begin{aligned} -1 &= (\sqrt{-1})^2 \\ &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{(-1)(-1)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Problema 15 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Escrevendo $i = \sqrt{-1}$ temos que a identidade

$$\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}.$$

Como esta identidade vale para quaisquer dois valores que coloquemos nos lugares de x e y , colocando a no lugar de x e b no lugar de y temos

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}.$$

Colocando agora b no lugar de x e a no lugar de y temos também

$$\sqrt{b-a} = i\sqrt{a-b}.$$

Multiplicando estas duas expressões obtemos

$$\sqrt{a-b}\sqrt{b-a} = i^2\sqrt{b-a}\sqrt{a-b},$$

e portanto $1 = i^2 = -1$.

Problema 16 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Observe que $(-1)^2 = 1$. Tomando logaritmos em ambos os lados temos

$$2 \log(-1) = \log 1 = 0,$$

e portanto $\log(-1) = 0$. Segue-se que $-1 = e^0$, e portanto $-1 = 1$.

Problema 17 Encontre o erro na seguinte *demonstração*.

- Seja x a solução da equação $e^x = -1$. Elevando ao quadrado temos $e^{2x} = 1$, donde obtemos $2x = 0$. Segue-se que $x = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} -1 &= e^x \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$